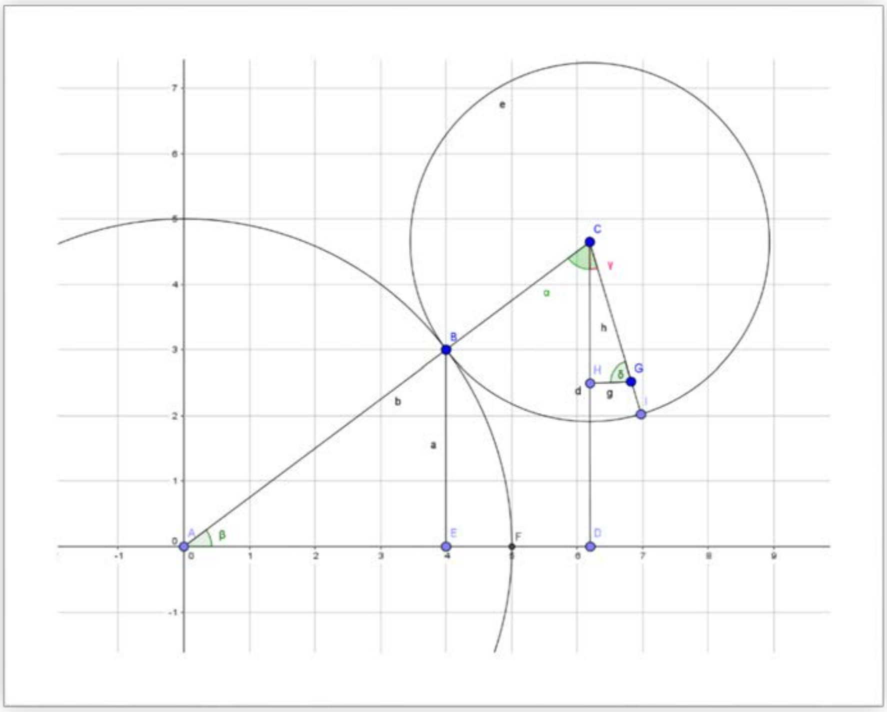


Ausgewählte Höhere Kurven

EPI- UND HYPOZYKLOIDEN

Peter Lang | Seminar WiSe 16/17 | 22. Dezember 2016

Inhalt

Epi- und Hypozykloiden

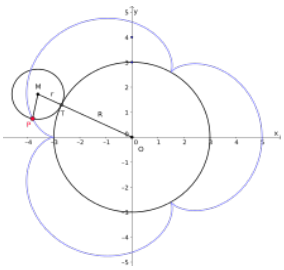
Im folgenden Seminar werde ich die Epi- und Hypozykloiden behandeln. Genauer, ihre Erzeugungsweisen, die Kurvenlängen und einen Bezug zur realen Verwendung der Kurveneigenschaften herstellen.

Wir vereinbaren zunächst ein paar Konventionen:

1)Die Entfernung des fixierten Punktes auf dem Radius des rollenden Kreises bezeichnen wir mit d. Falls wir beliebiges d zulassen, sprechen wir von Epi-/Hypotrochoiden.

2)

Aber zunächst erinnere man sich mal an seine Grundschulzeit. Vielleicht haben manche von Ihnen gerne Mandalas gemalt. Manche Kurven in Mandalas kann man auch als Zykloiden auffassen. Ganz typisch ist zum Beispiel eine solche Kurve:



DEFINITION 1.1:

Epizykloiden werden durch das abrollen eines Kreises B auf der äußeren Seite eines anderen festen Kreises A erzeugt. Man wähle einen festen Punkt auf dem Rand des Kreises B und beobachte seine Spur die er während dem abrollen hinterlässt.

Hypozykloiden erzeugt man analog durch abrollen auf der Innenseite des Kreisrandes.

Konstruktion der Koordinatengleichungen

Im Folgenden wollen wir eine Darstellung der Kurve in Gleichungen für x und y herleiten. Wir leiten die Konstruktion gleich für jede beliebige Epitrochoide her, d.h. die Länge der Strecke $\underline{CG}$ ist beliebig.

Wir bezeichnen nun eine gerade Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten Q, W mit $\underline{QW}$ und ein Kreissegment zwischen zwei Punkten A, B mit *AB.*

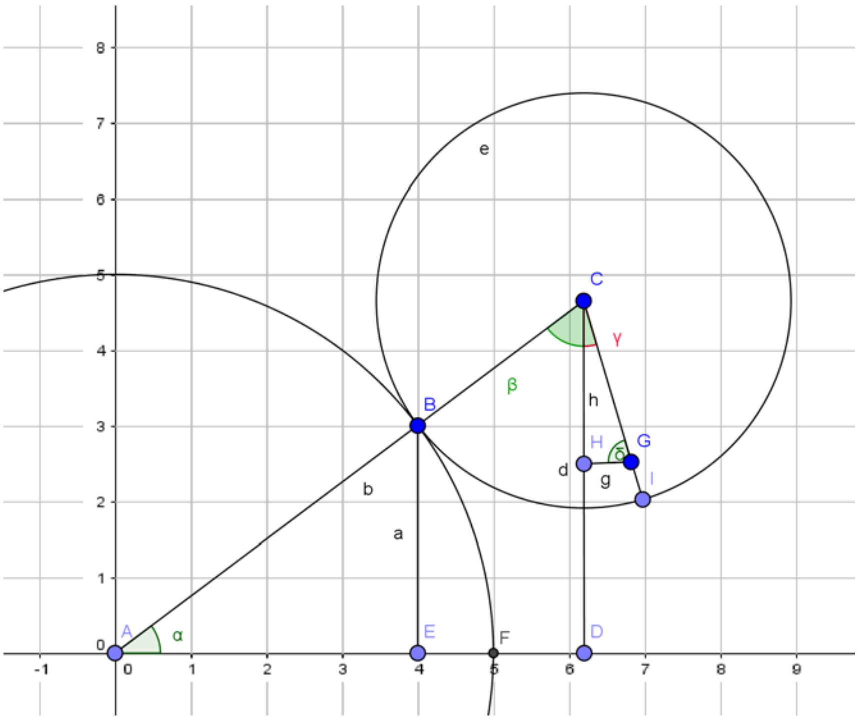
Es gilt: 0) Radius des festen Kreises $\underline{AB}$= a, Radius der beweglichen $\underline{BC}$= b

1) $BF = BI = \alpha * a = \beta * b$ (durch Konstruktionsweise ersichtlich)

2) $\gamma = \beta - (90° - \alpha) \rightarrow \delta = 90° - \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

3) $\underline{CD} = (a + b) * sin(\alpha)$

4) $\underline{AD} = (a + b) * cos(\alpha)$



Wir setzten noch: $a + b := b * m$. Mit Formel 1) erhalten wir:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{b} * \alpha + \alpha = \frac{a+b}{b} * \alpha = m\alpha \ .$$

Mit diesen Vorbereitungen können wir die Koordinatengleichungen bestimmen. Zunächst für x, indem wir 4) verwenden und die Strecke $\underline{HG}$ addieren.

$$\mathrm{HG} \;=\; \mathrm{d} * \cos(\delta) = \mathrm{d} * \cos\big(180° - (\alpha + \beta)\big) = \mathrm{d} * \cos(-(\alpha + \beta) = -\mathrm{d} * \cos(\alpha + \beta)$$

Es folgt die Gleichung:

$$x = (\mathrm{a} + \mathrm{b}) * \cos(\alpha) - d * \cos(\alpha + \beta)$$

$$x = b * m * \cos(\alpha) - d * \cos(m\alpha)$$

Analog nutzen wir für y Formel 3), subtrahieren aber nun die Strecke $\underline{CH}$.

$$\mathrm{CH} \;=\; \mathrm{d} * \sin(\delta) = \mathrm{d} * \sin\big(180° - (\alpha + \beta)\big) = -\mathrm{d} * \sin\big(-(\alpha + \beta)\big) = \mathrm{d} * \sin(\alpha + \beta)$$

Es folgt:

$$y = (a + b) * \sin(\alpha) - d * \sin(\alpha + \beta)$$

$$y = b * m * \sin(\alpha) - d * \sin(m\alpha)$$

Für die Hypozykloide kann man auf ähnliche Weise die Gleichungen herleiten. Man muss sich zunächst klar machen, dass nun gilt:

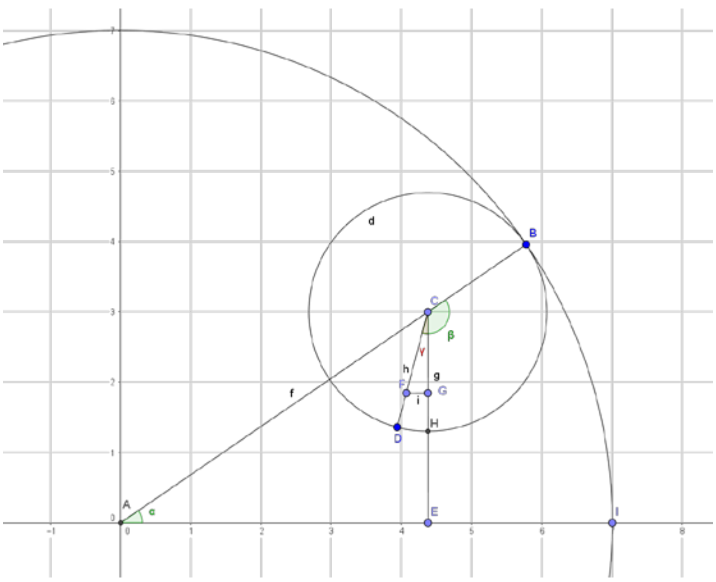
0) Radius des festen Kreises $\underline{AB}$= a, Radius der beweglichen $\underline{BC}$= b

1) $BD \;=\; BI \;=\; \alpha * a \;=\; \beta * b$

2) $\gamma \;=\; \beta - 90° - \alpha \;\rightarrow\; \delta \;=\; 90° - \gamma \;=\; 180° - (\beta - \alpha)$

3) $\underline{CD} = (a - b) * sin(\alpha)$

4) $\underline{AD} = (a - b) * cos(\alpha)$



Wir definieren uns noch: $a - b = mb$. Formel 1) liefert wieder: $\alpha - \beta = m\alpha$.

Jetzt können wir uns die Koordinatengleichungen herleiten. Fangen wir mit der x-Koordinate an. Wir können x als x = <u>AE</u> –<u>FG</u> darstellen.

$$\mathrm{FG} = \mathrm{d} * \cos(\delta) = \mathrm{d} * \cos\big(180° - (\beta - \alpha)\big) = -\mathrm{d} * \cos\big(-(\beta - \alpha)\big) = -\mathrm{d} * \cos(\beta - \alpha)$$

Es folgt:

$$x = (a - b) * \cos(\alpha) + d * \cos(\beta - \alpha)$$

$$x = b * m * \cos(\alpha) + d * \cos(m\alpha)$$

Für die y-Koordinate gilt analog: y = <u>CE</u>-<u>CG</u>.

$$\mathrm{CG} = \mathrm{d} * \sin(\delta) = \mathrm{d} * \sin\big(180° - (\beta - \alpha)\big) = -\mathrm{d} * \sin\big(-(\beta - \alpha)\big) = \mathrm{d} * \sin(\beta - \alpha)$$

$$y = (a - b) * \sin(\alpha) - d * \sin(\beta - \alpha)$$

$$y = b * m * \sin(\alpha) - d * \sin(m\alpha)$$

Damit haben wir die Gleichungen hergeleitet. Für die eigentlichen Hypo- und Epizykloiden setzten wir d = b, sodass unser fixierter Punkt genau auf dem Rand das abrollenden Kreises ist. Mit beliebigem d haben wir die Möglichkeit beliebige Epi- und Hypotrochoiden zu beschrieben.

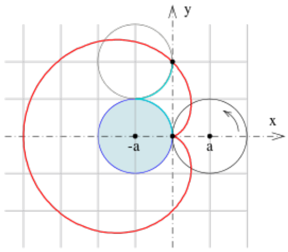
Bekannte Beispiele

Hier betrachten wir Sonderfälle der Epi- und Hypozykloiden die durch bestimmte Verhältnisse der zwei Kreisradien entstehen.

KARDIOIDE: A=B=D → M = 2 (EPIZYKLOIDE)

$$x = b * 2 * \cos(\beta) - b * \cos(2\beta)$$

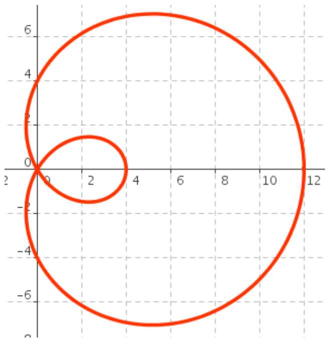
$$y = b * 2 * \sin(\beta) - b * \sin(2\beta)$$



PASCALSCHE SCHNECKE: A=B → M = 2 (EPITROCHOIDE)

$$x = b * 2 * \cos(\beta) - d * \cos(2\beta)$$

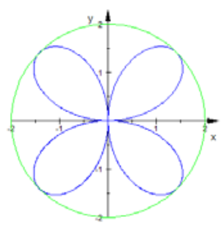
$$y = b * 2 * \sin(\beta) - d * \sin(2\beta)$$



ROSETTE: A=4B, D = 3B → M = 3 (EPITROCHOIDE)

$$x = b * 3 * \cos(\beta) - 3b * \cos(2\beta)$$

$$y = b * 3 * \sin(\beta) + 3b * \sin(2\beta)$$



Anzahl der „Spitzen“ von Hypo-/Epizykloiden

Nachdem wir uns nun mit ein paar Beispielen vertraut gemacht haben können wir allgemeineren Fragen stellen. Unter dem Begriff Spitzen versteht man die Punkte auf der Kurve welche nicht glatt sind. Diese kommen nur bei d =b zustande. Also betrachten wir nur Epi- und Hypozykloiden.

Satz: Wenn $m = \frac{a+b}{b}$ ein Element der natürlichen Zahlen ist, dann hat die Epizykloide genau m-1 Spitzen.

Beweis:

Es gilt wie bereits gesehen, dass $BF = BI$ ist und eine Spitze genau dann entsteht, wenn$BF = 2 * \pi * b * k$. Mit k ebenfalls als Element der natürlichen Zahlen, was dem k-maligen kompletten abrollen des Kreises entspricht.

Weiter können haben wir $m = \frac{a+b}{b}$ definiert. Daraus folgt: $a = (m-1) * b$. Der Umfang des festen Kreises beträgt genau a.

Also kann der kleine Kreis genau (m-1)- mal komplett abgerollt werden bis er wieder seine Ausgangsposition annimmt. Es entstehen also m-1 Spitzen, da die Spitze bei k = 0 gleich der Spitze bei k = m-1 ist. ▫

Für Hypozykloiden existiert ein analoges Ergebnis.

Satz: Wenn $m = \frac{a-b}{b}$ ein Element der natürlichen Zahlen ist, dann hat die Epizykloide genau m+1 Spitzen.

Im Beweis betrachtet man sich wieder die Bogenlängen und kann diesmal $a = (m+1) * b$ setzen und erhält somit (m+1)- Spitzen.

Aus diesen Aussagen können wir weitere Interessante Eigenschaften herausziehen. Zunächst sehen wir anhand des Satzes, dass ein Bogen(von Spitze zu Spitze) von $\frac{a*2*\pi}{m-1} * k$ bis $\frac{a*2*\pi}{m-1} * (k+1)$ (mit k Element der natürlichen Zahlen) geht. Diese Erkenntnis wird uns später noch weiter helfen bei der Berechnung der Bogenlänge oder auch der Fläche.

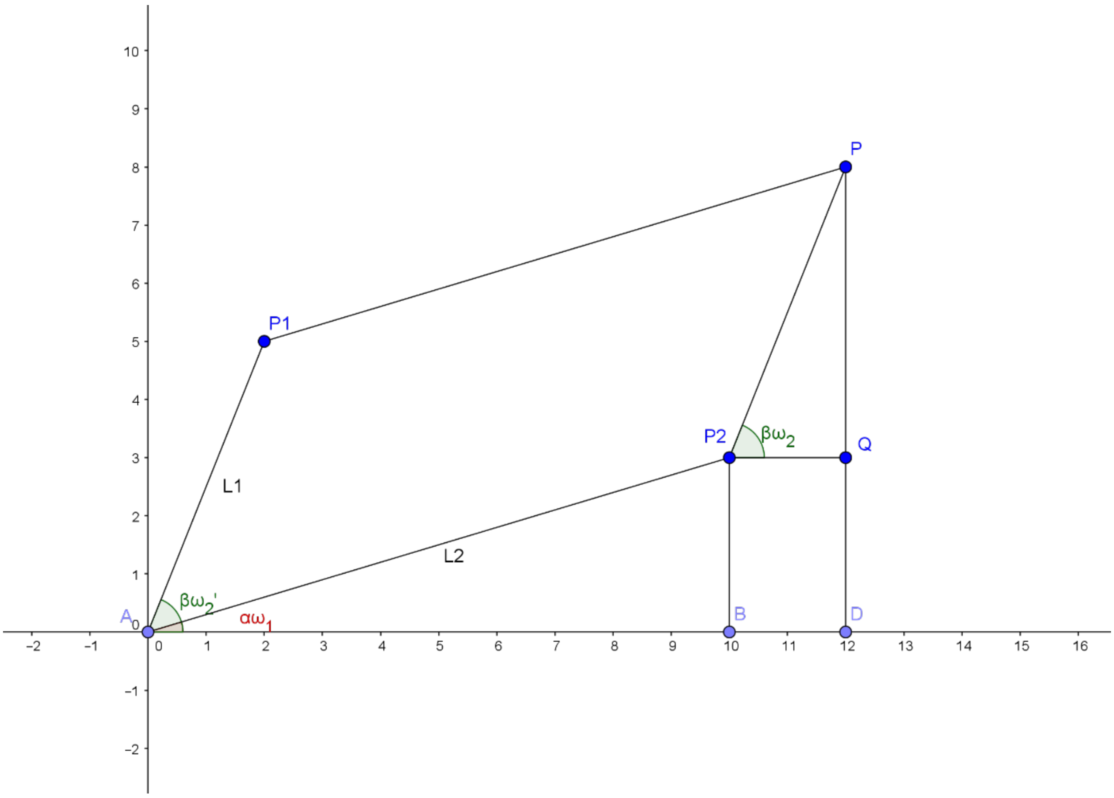
Auch können wir uns klar machen, dass die Kurve sich bei rationalem $(m-1) = \frac{u}{v}$ mit u und v teilerfremd sich nach v ganzen Umläufen wieder exakt schließt.

Erzeugung durch ein Gelenkparallelogramm

Als nächstes betrachten wir uns eine weitere Erzeugungsweise der Epi- und Hypozykloiden.

ω_1, ω_2 sind Winkelgeschwindigkeiten, d.h. eine Angabe wie schnell sich jeweils L1 oder L2 um ihren Fixpunkt O drehen.

Wenn sich nun OP_1 und OP_2 des Gelenkparallelogramms gleichförmig aber mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten um den Eckpunkt O drehen, so beschreibt die Spur des Punktes P eine Epi- oder Hypozykloide.



Um dies nachzuprüfen stellen wir folgende Überlegungen an. Zunächst legen wir eine Startposition fest, sodass alle Punkte des Parallelogramms auf der x- Achse liegen. Wir führen auch noch eine Variable t für die vergangene Zeit ein. Folglich ist OP1 nach gewisser Zeit t um $t\omega_1$ und OP2 um $t\omega_2$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

P besitzt folgende Koordinaten: $x = L1 * \cos(t\omega 1) + L2 * \cos(t\omega 2)$

$$y = L1 * \sin(t\omega 1) + L2 * \sin(t\omega 2)$$

Wir setzen $\omega_2 = n * \omega_1$ und $\omega_1 * t = \tau$. → $x = n * \frac{L1}{n} * \cos(\tau) + L2 * \cos(n\tau)$

$$y = n * \frac{L1}{n} * \sin(\tau) + L2 * \sin(n\tau)$$

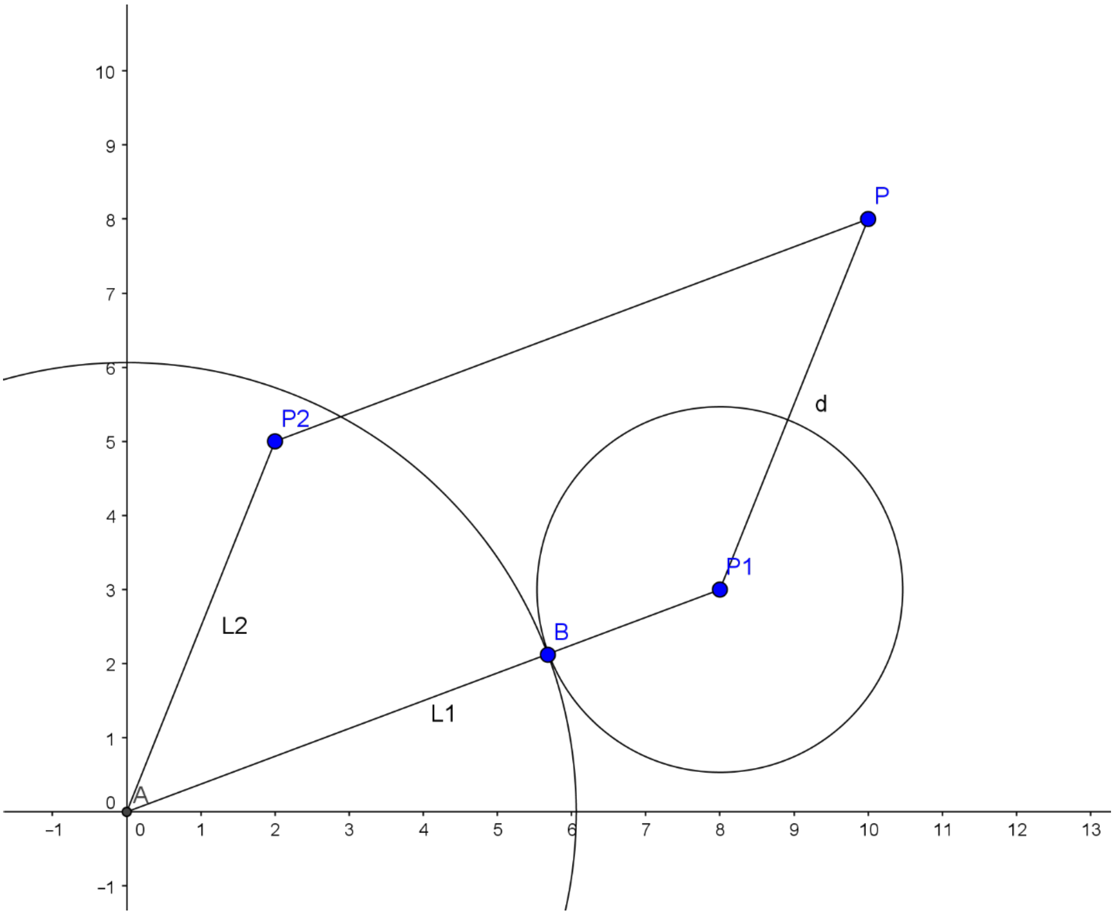
Dies sind schon unsere Gleichungen für die Epitrochoide. Es muss nur noch $b = \frac{L1}{n}$, $d = L2$ und $n = m$ gesetzt werden und man erhält schon Koordinatengleichungen. Die „falschen“ Vorzeichen kommen Zustande, da wir eine andere Startlage gewählt haben. Anstatt einen Punkt der möglichst nah am festen Kreis liegt haben wir jetzt einen der am weitesten davon entfernt ist als Start gewählt.

Ersetzt man weiter n durch (-n) und somit auch ω_2 durch ($-n\omega_1$). Man lässt also die Seiten entgegengesetzt laufen. So erhalten wir durch die Spur von P die Hypotrochoiden.

$$x = n * \frac{L1}{n} * \cos(\tau) + \mathrm{L2} * \cos(n\tau)$$

$$y = n * \frac{L1}{n} * \sin(\tau) - L2 * \sin(n\tau)$$

Anhand des folgenden Bildes ist nochmal illustriert wie sich diese Erzeugungsweise auf die Erzeugung als Rollkurven zurückführen lässt.



Hieraus geht hervor was wir vorher schon anhand der Gleichungen geschlossen haben.

1) $L1 = a + b = nb \rightarrow L1/n = b$
2) $L2 = b$

Rektifikation und Quadratur

Unter Rektifikation versteht man die Berechnung der Kurvenlänge. In unserem Fall werden wir uns lediglich Epi-/Hypozykloiden betrachten. (d=b)

Wir rufen uns in Erinnerung, dass die Länge einer Kurve (parametrisiert) gleich dem Integral über die Wurzel der Summe der Quadrate der 1.Ableitungen.

- ➔ $\int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

$$\gamma(\alpha) = \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b*m*\cos(\alpha) - b*\cos(m\alpha) \\ b*m*\sin(\alpha) - b*\sin(m\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\gamma'(\alpha) = \begin{pmatrix} x'(\alpha) \\ y'(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b*m*\sin(\alpha) + b*m*\sin(m\alpha) \\ b*m*\cos(\alpha) - b*m*\cos(m\alpha) \end{pmatrix}$$

Mit dem Satz über die Anzahl von „Spitzen“ können wir jetzt die Länge eines Bogens berechnen. Wir wissen nämlich, dass ein Bogen z.B. von 0 bis $\frac{2\pi}{m-1} = c$ geht.

$$\int_0^c \sqrt{x'(\alpha)^2 + y'(\alpha)^2}\, d\alpha = \sqrt{2}bm * \int_0^c \sqrt{1 - 1 * \cos(m\alpha - \alpha)}\, d\alpha$$

$$= 2bm * \int_0^c \sin\left(\frac{m\alpha - \alpha}{2}\right) d\alpha = 2bm * (-\cos\left(\frac{m\alpha - \alpha}{2}\right) * \left(\frac{2}{m-1}\right)]_0^c$$

$$= \frac{4bm}{m-1} * (-\cos(\pi) + \cos(0)) = \frac{8bm}{m-1} = \frac{8(a+b)}{m-1} = U_1$$

Wenn der Umfang eines Epizykloiden Bogens nun U_1 ist, so wissen wir auch was der Umfang der Epizykloide von 0 bis 2π ist.

$$U = 8(a+b)$$

Für die Hypozykloide erhält man ein analoges Ergebnis. Man erhält einen Umfang von: $U = 8(a-b)$.

Die Fläche unter einem Bogen ist schon etwas aufwendiger zu berechnen und würde den Rahmen sprengen, daher nur kurz die Formeln.

1) $A_1 = \frac{m*(m+1)*b^2}{n} * \pi$ → $A = A_1 * n$ (Epizykloide)
2) $A_2 = \frac{m*(m-1)*b^2}{n} * \pi$ → $A = A_2 * n$ (Hypozykloide)

Verwendung im Ingenieurswesen

Wir betrachten uns in diesem Fall noch einmal eine spezielle Form der Hypozykloide. Die Ellipse.

Für die Koordinatengleichung gilt mit a=2b und somit m=1:

$$x = b * \cos(\alpha) + \ d * \cos(\alpha)$$

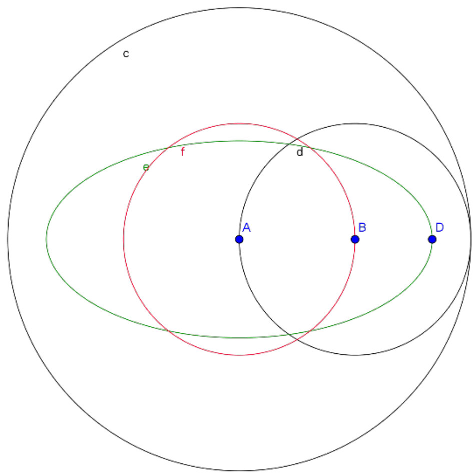
$$y = b * \sin(\alpha) - d * \sin(\alpha)$$

Durch umstellen erhalten wir: $sin(\alpha) = \frac{y}{b-d}$ und $cos(\alpha) = \frac{x}{b+d}$

Weiter gilt $sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ und somit auch die Ellipsengleichung:

$$(\frac{y}{b-d})^2 + (\frac{x}{b+d})^2 = 1$$

Gehen wir jetzt in den Bereich der Getriebetechnik. Genauer gesagt wollen wir uns mit dem Planetengetriebe beschäftigen. Solch ein Getriebe ist in der Lage elliptische Bewegungen in kreisförmige umzuwandeln. Diese Eigenschaft ist sehr nützlich da Bewegungen häufig für ihren „Auftrag“ angepasst werden müssen. Durch die Konstruktion in der folgenden Abbildung erkennt man die Umwandlung.



Man nimmt einen Innenverzahnten festen Kreis c und einen außenverzahnten beweglichen Kreis d mit halbem Durchmesser. Man wählt auf dem beweglichen Kreis einen Fixpunkt D, der z. B. eine elliptische Spur hinterlässt. Anschließend wählt man einen zweiten Fixpunkt B. Dieser hinterlässt in unserem Fall eine kreisförmige Spur. Identifiziert man nun den grünen Kreis als Ursprungsbewegung, so ist der rote Kreis die Bewegung nach der Umwandlung. Dieses Schema kann man beliebig fortsetzen indem man die Fixpunkte B und D versetzt.